$$K(N) = \begin{cases} K_0 + p(K_+ - V_K) & N = 1 \\ K_0 + p(p+1)(K_+ - V_K) & N = 2 \\ K_0 + (K_+ - V_K)\left(p^{N-1}(p+1) + \sum_{i=1}^{N-2} p^i\right) & N \geq 3 \end{cases}$$

$$K(N \to \infty) = K_0 + \frac{K_+ - V_K}{1-p}$$

$K(N)$	Konzentration nach N Wasserwechsel
p	Anteil an Restwasser im Aquarium
K_0	Anfängliche Konzentration
K_+	Wöchentliche Konzentrationszugabe
V_K	Wöchentlicher Verbrauch der Konzentration

1 Herleitung

Ausgangssituation ist folgende. Ein befülltes Aquarium wird mit allen Zielnährstoffniveaus versehen. Für jeden Nährstoff gilt die Zielkonzentration/Anfangskonzentration von K_0. Nun vergeht eine Woche und täglich werden Nährstoffe hinzugefügt. Die Summe der über der Woche hinzugefügten Nährstoffe beträgt K_+. Die Produzenten haben während dieser Zeit die Menge V_K verbraucht. Nun wird ein Wasserwechsel mit $1-p$ Anteilen durchgeführt ($0 \leq p \leq 1$). D.h. wird ein 60%-Wasserwechsel durchgeführt, beträgt $p = 0,4$ und $1 - p = 0,6$. Das Wechselwasser wird auf die Zielkonzentration K_0 aufgedüngt.
Diese Aktionen werden mit folgenden Gleichungen beschrieben:

$$K(N=0) = K_0 + \underbrace{K_+ - V_K}_{\text{Wöchentlicher Zu-/Abgang}} \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

$$\begin{aligned} K(N=1) &= (K_0 + K_+ - V_K)p + (1-p)K_0 \\ &= K_0 + p\,(K_+ - V_K) \qquad (3) \\ K'(N=1) &= K_0 + p\,(K_+ - V_K) + K_+ - V_K \\ &= K_0 + (p+1)\,(K_+ - V_K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(N=2) &= p\left[K_0 + (p+1)\,(K_+ - V_K)\right] + (1-p)\cdot K_0 \\ K(N=2) &= K_0 + p(p+1)\left[K_+ - V_K\right] \qquad (4) \\ K'(N=2) &= K_0 + p(p+1)\left[K_+ - V_K\right] + (K_+ - V_K) \end{aligned}$$

$$K(N=3) = K_0 + (K_+ - V_K)\left(p + p^2(p+1)\right) \tag{5}$$

Das Prinzip sollte klar sein: $+K_+ - V_K$...

$$K(N=4) = K_0 + (K_+ - V_K)\left(p + p^2 + p^3(p+1)\right) \tag{6}$$

$$\ldots$$

$$K(N=5) = K_0 + (K_+ - V_K)\left(p + p^2 + p^3 + p^4(p+1)\right) \tag{7}$$

$$\ldots$$

$$K(N=W) = K_0 + (K_+ - V_K)\left(p^{W-1}(p+1) + \sum_{i=1}^{W-2} p^i\right) \tag{8}$$

$$= K_0 + (K_+ - V_K)\left(p^{W-1}(p+1) + \frac{1-p^{W-2}}{1-p}\right) \tag{9}$$

Da Gl. (8) konvergiert ($p < 1$), lässt sich die geometrische Reihe anwenden. Mit Variablensubstitution lässt sich Gl. (8) auf das bekannte Muster

$$\sum_{i=0}^{N} a_0 x^i = a_0 \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \tag{10}$$

umformen.